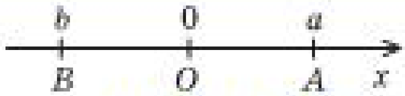
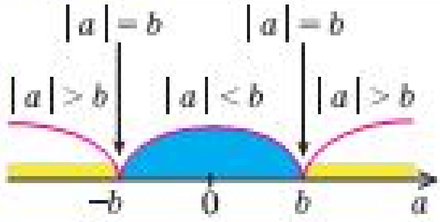
## 2. Модуль дійсного числа та його властивості

| Означення | Геометричний зміст модуля |
|---|---|
| ***Модулем*** додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю. $$\lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ при } a>0, \\ 0 \text{ при } a=0, \\ -a \text{ при } a<0 \end{cases}$$ |   $\lvert a\rvert = OA$, $\lvert b\rvert = OB$ <br> $\lvert a-b\rvert = AB$ <br> На координатній прямій модуль — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число. <br> *Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій* |

### Властивості

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\lvert a\rvert \geqslant 0$ | *Модуль будь-якого числа — невід'ємне число* |
| 2. | $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$ | *Модулі протилежних чисел рівні* |
| 3. | $a \leqslant \lvert a\rvert$, тобто $-\lvert a\rvert \leqslant a \leqslant \lvert a\rvert$ | *Величина числа не перевищує величини його модуля* |
| 4. | При $b>0$ $\lvert a\rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$ |   |
| 5. | При $b>0$ $\lvert a\rvert \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$ | |
| 6. | $\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$ | *Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників* |
| 7. | $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $(b \neq 0)$ | *Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника* (якщо знаменник не дорівнює нулю) |
| 8. | $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$  $\lvert a\rvert^2 = a^2$  $\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$ | |
| 9. | $\lvert a+b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ <br> $\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n\rvert \leqslant \lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert$ | *Модуль суми не перевищує суми модулів доданків* |
| 10. | $\lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert \leqslant \lvert a \pm b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ | |

## Пояснення й обґрунтування

**1. Числові множини.** У курсі математики ви зустрічалися з різними числами: натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними, дійсними. Уявлення про числа у людства складалися поступово, під впливом вимог практики. Наприклад, *натуральні числа* з'явилися у зв'язку з необхідністю підрахунку предметів. Але для того щоб дати відповідь на запитання «Скільки сірників у порожній коробці з-під сірників?», множини натуральних чисел $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ недостатньо — для цього потрібно мати ще й число нуль. Приєднуючи до множини $N$ натуральних чисел число 0, одержуємо множину *невід'ємних цілих чисел*. Її часто позначають $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Одних тільки невід'ємних цілих чисел виявилося недостатньо для розв'язування задач практики (а отже, і математичних задач, що відображують задану реальну ситуацію). Так, для того щоб охарактеризувати температуру повітря вище і нижче нуля чи рух тіла в протилежних напрямках, потрібні протилежні до натуральних числа, тобто *від'ємні числа*. Для натурального числа $n$ протилежним вважають число $-n$, а для числа $-n$ протилежним вважають число $n$. Нуль вважають числом, протилежним самому собі.

Натуральні числа, нуль і числа, протилежні натуральним, складають множину $\boldsymbol{Z}$ *цілих чисел*.

Вимірювання величин привело до необхідності розширення множини цілих чисел і введення *раціональних чисел*. Наприклад, середня багаторічна температура повітря в січні в м. Харкові становить $-7{,}3\ ^\circ\mathrm{C}$, тривалість уроку — 45 хв, або $\frac{3}{4}$ год.

Таким чином, вибираючи якусь одиницю виміру, ми одержуємо числове значення величин, що можна виразити за допомогою різних раціональних чисел — цілих і дробових, додатних і від'ємних.

Цілі і дробові числа складають множину $Q$ *раціональних чисел*.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$ (тобто чисельник $m$ є цілим числом, а знаменник $n$ — натуральним).

Раціональне число можна записати різними дробами. Наприклад,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{10}{20},\quad -\frac{2}{7}=\frac{-2}{7}=\frac{-8}{28}=\frac{-10}{35},\quad 1{,}2=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=\frac{120}{100},\quad 5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{50}{10}.$$

Як видно з наведених прикладів, серед дробів, що зображують дане раціональне число, завжди є єдиний нескоротний дріб (для цілих чисел — це дріб, знаменник якого дорівнює 1).

Зауважимо, що раціональне число, записане у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$, можна записати також у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу, поділивши чисельник на знаменник. Наприклад, $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$.

Домовимося, що скінченний десятковий дріб можна зображувати у вигляді нескінченного, у якого після останнього десяткового знака, відмінного від нуля, на місці наступних десяткових знаків записують нулі, наприклад, $\frac{3}{4}=0{,}75=0{,}75000\ldots$.

Цілі числа також домовимося записувати у вигляді нескінченного десяткового дробу, у якого справа від коми на місці десяткових знаків стоять нулі, наприклад $13 = 13{,}000\ldots$. Таким чином, будь-яке раціональне число може бути записане як нескінченний періодичний дріб. Нагадаємо, що у нескінченного періодичного дробу, починаючи з деякого місця, усі десяткові знаки повторюються. Групу цифр, що повторюється, називають *періодом дробу*; у записі дробу період наводять у дужках. Наприклад, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots=0{,}(3)$, $\frac{3}{22}=0{,}136363636\ldots=0{,}1(36)$.

Отже, *кожне раціональне число може бути записане у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і, навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб задає раціональне число.*

Зауважимо, що будь-який періодичний десятковий дріб, який має своїм періодом дев'ятку, дорівнює нескінченному десятковому дробу з періодом нуль, у якого десятковий розряд, що передує періоду, збільшений на одиницю порівняно з відповідним розрядом першого дробу. Наприклад, нескінченні періодичні дроби $0{,}2(9)$ і $0{,}3(0)$ є записом одного й того самого раціонального числа $\frac{3}{10}$. Дійсно, ураховуючи, що сума нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $a_1$ і знаменником $q$ обчислюється за формулою $S=\frac{a_1}{1-q}$, маємо:

$$0{,}2(9)=0{,}2999\ldots=0{,}2+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\ldots=0{,}2+\frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{10}}=0{,}2+\frac{1}{10}=0{,}3=0{,}3(0).$$

У подальшому, записуючи раціональні числа за допомогою нескінченних періодичних десяткових дробів, домовимося не розглядати нескінченні періодичні дроби, період яких дорівнює дев'яти.

Кожне раціональне число можна зобразити точкою на координатній прямій (тобто на прямій, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю виміру). Наприклад, на рисунку 9 зображено декілька раціональних чисел $\left(0; 1; -\frac{1}{2}; 2{,}5\right)$.


Рис. 9

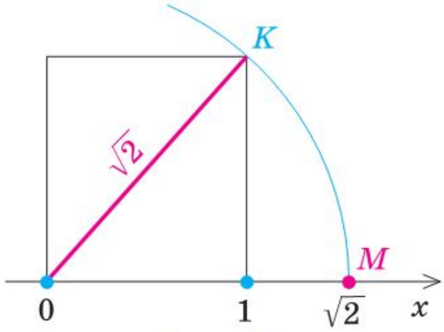


Рис. 10

Але на координатній прямій розташовані точки, які зображають числа, що не є раціональними. Наприклад, з курсу алгебри відомо, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним. Це так зване ірраціональне число. Якщо побудувати квадрат із стороною, рівною 1, на координатній прямій $x$ (рис. 10), то його діагональ дорівнюватиме $\sqrt{2}$. Тоді, провівши дугу кола з центром у точці $O$ і радіусом $OM = \sqrt{2}$, одержимо точку $M$, координата якої дорівнює $\sqrt{2}$. Крім числа $\sqrt{2}$, ви також зустрічалися з ірраціональними числами $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ тощо.

Раціональні та ірраціональні числа складають *множину дійсних чисел R*. На координатній прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка і, навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число (у такому разі кажуть, що між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої встановлюється взаємно однозначна відповідність).

*Кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, ірраціональні — у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.*

Нагадаємо, що для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними (у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним) використовують наближені значення цих чисел. Зокрема, *щоб порівняти два дійсних числа, треба розглядати послідовно їх наближені значення з недостачею з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д. доти, поки не одержимо якесь наближене значення одного числа, більше за відповідне наближене значення другого. Тоді те число, наближене значення якого більше, і вважається більшим.* Наприклад, якщо $\alpha = \sqrt{3} = 1{,}7320508...$, $\beta = 1\frac{3}{4} = 1{,}7500000...$, то $\alpha < \beta$ (оскільки $1{,}73 < 1{,}75$).

Для того щоб виконати додавання чи множення розглянутих чисел $\alpha$ і $\beta$, послідовно записують їх наближені значення з недостачею та з надлишком (з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д.) і виконують дії над одержаними раціональними числами. У результаті послідовно отримують значення суми чи добутку з потрібною точністю.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha+\beta$ | $\alpha\beta$ |
|---|---|---|---|
| $1<\alpha<2$ | $1<\beta<2$ | $2<\alpha+\beta<4$ | $1<\alpha\beta<4$ |
| $1{,}7<\alpha<1{,}8$ | $1{,}7<\beta<1{,}8$ | $3{,}4<\alpha+\beta<3{,}6$ | $2{,}89<\alpha\beta<3{,}24$ |
| $1{,}73<\alpha<1{,}74$ | $1{,}75<\beta<1{,}76$ | $3{,}48<\alpha+\beta<3{,}50$ | $3{,}0275<\alpha\beta<3{,}0624$ |
| $1{,}732<\alpha<1{,}733$ | $1{,}750<\beta<1{,}751$ | $3{,}482<\alpha+\beta<3{,}484$ | $3{,}031<\alpha\beta<3{,}034483$ |
| ... | ... | ... | ... |

Як бачимо, $\alpha+\beta=3{,}48...$, $\alpha\beta=3{,}03...$ .

У курсі математичного аналізу доводиться, що у випадку, коли наближені значення чисел $\alpha$ і $\beta$ послідовно беруть з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д., то значення суми $\alpha+\beta$ з недостачею і з надлишком прямує до одного й того самого числа, яке приймають за значення суми $\alpha+\beta$ (аналогічно означають і добуток $\alpha\beta$).

**2. Модуль дійсного числа та його властивості.** Нагадаємо означення модуля.

***Модулем*** **додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа — число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.**

Це означення можна коротко записати декількома способами.

$$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ 0 \text{ при } a=0,\\ -a \text{ при } a<0,\end{cases} \quad \text{або} \quad |a|=\begin{cases}a \text{ при } a\geqslant 0,\\ -a \text{ при } a<0,\end{cases} \quad \text{або} \quad |a|=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ -a \text{ при } a\leqslant 0,\end{cases} \quad \text{або}$$

$$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a\geqslant 0,\\ -a \text{ при } a\leqslant 0.\end{cases}$$

За потреби ми будемо користуватися будь-яким із цих записів означення модуля. Для того щоб знайти $|a|$, за означенням необхідно знати знак числа $a$ і використати відповідну формулу. Наприклад, $|5|=5$, $|-3|=-(-3)=3$, $|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$.

**На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображає це число.**

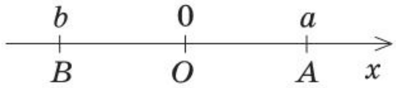


Рис. 11

Дійсно, якщо $a>0$ (рис. 11), то відстань $OA=a=|a|$.

Якщо $b<0$, то відстань $OB=-b=|b|$.

***Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій.***

Для доведення можна скористатися тим, що при паралельному перенесенні вздовж осі координат на $b$ одиниць абсциса відповідної точки змінюється на $b$: до абсциси заданої точки додається число $b$, тобто при

$b > 0$ точка переноситься вправо, а при $b < 0$ — уліво. Позначимо на координатній прямій числа $a$, $b$, $a - b$ відповідно точками $A$, $B$, $C$. На рисунку 12 ці точки зображено для випадку $a > 0$ і $b < 0$, хоча наведене далі обґрунтування не залежить від знаків $a$ і $b$. При паралельному перенесенні вздовж осі $Ox$ на $b$ одиниць точка $O$ перейде в точку $B$, а точка $C$ (з координатою $a - b$) — у точку з координатою $a - b + b = a$, тобто в точку $A$. Тоді $CO = AB$. Але відстань $CO$ — це відстань від точки $a - b$ до початку координат, тобто $CO = |a - b|$, а отже, і $AB = |a - b|$. ○

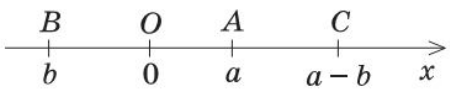


Рис. 12

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати властивості модуля, наведені в таблиці 2.

Наприклад, ураховуючи, що $|a|$ — це відстань від точки $a$ до точки $O$, а відстань може виражатися тільки невід'ємним числом, одержуємо

$$|a| \geqslant 0,$$

тобто *модуль будь-якого числа є невід'ємним числом*.

Ураховуючи, що точки $a$ і $-a$ розташовані на однаковій відстані від точки $O$, одержуємо

$$|-a| = |a|,$$

це означає, що *модулі протилежних чисел рівні*.

Якщо $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, а якщо $a < 0$, то $a < |a|$. Отже, завжди

$$a \leqslant |a|,$$

тобто *величина числа не перевищує величини його* модуля.

Якщо в останню нерівність замість $a$ підставити $-a$ і врахувати, що $|-a| = |a|$, то одержуємо нерівність $-a \leqslant |a|$. Звідси $a \geqslant -|a|$, що разом із нерівністю $a \leqslant |a|$ свідчить, що для будь-якого дійсного числа $a$ виконується подвійна нерівність

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|. \qquad (1)$$

При $b > 0$ нерівність $|a| \leqslant b$ означає, що число $a$ на координатній прямій розміщене від точки $O$ на відстані, яка не перевищує $b$ (рис. 13), тобто в проміжку $[-b; b]$. Навпаки, якщо число $a$ належить цьому проміжку, тобто $-b \leqslant a \leqslant b$, то $|a| \leqslant b$. Отже,

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b. \qquad (2)$$

Зауважимо, що останнє твердження справедливе і при $b = 0$ (тоді обом нерівностям задовольняє тільки одне значення $a = 0$).

Аналогічно при $b > 0$ нерівність $|a| \geqslant b$ означає, що число $a$ на координатній прямій знаходиться від точки $O$ на відстані, яка більша або дорівнює $b$ (рис. 13), тобто

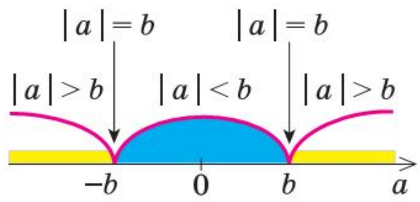


Рис. 13

в цьому випадку $a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$. Навпаки, якщо число $a$ задовольняє одній із цих нерівностей, то $|a| \geqslant b$. Отже, при $b > 0$ нерівність $|a| \geqslant b$ рівносильна сукупності нерівностей $a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$, що можна записати так:

$$\text{при } b > 0 \quad \boldsymbol{|a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ або } a \geqslant b}.$$

Властивості модуля добутку і модуля дробу фіксують відомі правила дій над числами з однаковими і різними знаками:

*модуль добутку дорівнює добутку модулів множників*, тобто

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

*модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника* (якщо знаменник не дорівнює нулю), тобто

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0).$$

Формулу для знаходження модуля добутку можна узагальнити для випадку декількох множників:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|. \qquad (3)$$

Якщо у формулі (3) взяти $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, одержуємо формулу

$$|a^n| = |a|^n.$$

Застосовуючи останню формулу справа наліво при $n = 2k$ і враховуючи, що $a^{2k} \geqslant 0$ при всіх значеннях $a$, одержуємо $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Отже,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Для обґрунтування нерівності

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \qquad (4)$$

запишемо нерівність (1) для чисел $a$ і $b$:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|; \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Додаючи почленно ці нерівності, одержуємо

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Ураховуючи нерівність (2), маємо

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

тобто *модуль суми не перевищує суми модулів доданків*.

Якщо в нерівності (4) замінити $b$ на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|. \qquad (5)$$

Якщо записати число $a$ так: $a = b + (a - b)$ і використати нерівність (4), то одержимо нерівність $|a| \leqslant |b| + |a - b|$. Звідси

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|. \qquad (6)$$

Якщо в нерівності (6) замінити $b$ на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a| - |b| \leqslant |a + b|, \qquad (7)$$

Міняючи місцями букви $a$ і $b$ у нерівностях (6) і (7) та враховуючи, що $|a - b| = |b - a|$, маємо також нерівності

$$|b| - |a| \leqslant |a \pm b|. \qquad (8)$$

Одержані нерівності (4)–(8) можна коротко записати так:

$$||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

## Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Доведіть, що **сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.**

| *Розв'язання* | *Коментар* |
|---|---|
| ▶ Нехай задано два раціональних числа $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ і $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, де $m_1$ і $m_2$ — цілі, а $n_1$ і $n_2$ — натуральні числа. Оскільки сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка двох звичайних дробів завжди є звичайним дробом, то одержаний результат завжди буде раціональним числом. Наприклад, $r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}$, де $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — ціле число, а $n_1 n_2$ — натуральне. ◁ | Будь-яке раціональне число можна записати як дріб $\frac{m}{n}$, де $m$ — ціле, $n$ — натуральне число. Щоб довести твердження задачі, достатньо довести, що сума, різниця, добуток і частка двох дробів виду $\frac{m}{n}$ буде дробом такого самого виду. |

**Приклад 2** Доведіть, що **для будь-якого натурального числа $n$ число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне.**

*Коментар*

Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного: припустити, що задане додатне число є раціональним ненатуральним (тобто дробом), і отримати суперечність з умовою або з якимсь відомим фактом.

Записуючи $\sqrt{n}$ у вигляді нескоротного дробу, слід ураховувати, що при натуральних значеннях $n$ це число завжди буде невід'ємним.

*Розв'язання*

▶ Припустимо, що $\sqrt{n}$ не є ірраціональним числом (тоді це число раціональне) і не є натуральним числом. Отже, це число може бути тільки раціональним нескоротним дробом $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, де $p$ і $q$ — натуральні числа

$(q \neq 1)$. За означенням квадратного кореня маємо $n = \frac{p^2}{q^2}$, тобто $n = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$.

Ураховуючи, що $q \neq 1$, одержуємо, що дріб $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$, який дорівнює натуральному числу $n$, повинен бути скоротним. Отже, у натуральних множників, що стоять у чисельнику і знаменнику цього дробу, повинен бути спільний натуральний дільник, який відрізняється від 1. Але в чисельнику стоять тільки множники $p$, а в знаменнику — тільки множники $q$. Тоді числа $p$ і $q$ мають натуральний дільник, який відрізняється від 1, тобто дріб $\frac{p}{q}$ є скоротним дробом, що суперечить умові. Таким чином, наше припущення неправильне, і для будь-якого натурального числа $n$ число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне. ◁

Наприклад, оскільки числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ не є натуральними числами $\left(1 < \sqrt{3} < 2,\ 3 < \sqrt{10} < 4\right)$, то $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ — ірраціональні числа.

**Приклад 3*** Доведіть, що сума $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ — число ірраціональне.

| *Розв'язання* | *Коментар* |
|---|---|
| ▶ Припустимо, що число $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ — раціональне. Тоді $\sqrt{5} = r - \sqrt{3}$. Піднісши обидві частини останньої рівності до квадрата, маємо $5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3$. Звідси $2r\sqrt{3} = r^2 - 2$. Отже, $\sqrt{3} = \frac{r^2 - 2}{2r}$. Але права частина цієї рівності — раціональне число (оскільки за припущенням $r$ — раціональне число), а ліва — ірраціональне. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і число $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ — ірраціональне. ◁ | Для доведення твердження задачі можна використати метод «від супротивного» — припустити, що задане число є раціональним, і отримати суперечність з якимсь відомим фактом, наприклад з тим, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число.<br>Аналізуючи одержані вирази, використовуємо результат прикладу 1: *якщо число $r$ — раціональне, то числа $r^2 - 2$ і $2r$ та їх частка теж будуть раціональними.*<br>Зазначимо, що знаменник отриманого дробу $2r = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \neq 0$. |

**Приклад 4** Розв'яжіть рівняння[1] $|2x + 5| = 7$.

[1] Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля, докладніше розглянуто в § 8.

| *Розв'язання* | *Коментар* |
|---|---|

I спосіб

$$2x + 5 = 7 \text{ або } 2x + 5 = -7,$$
$$2x = 2 \text{ або } 2x = -12,$$
$$x = 1 \text{ або } x = -6.$$

*Відповідь:* 1; –6. ◁

Задане рівняння має вигляд $|t| = 7$ (у даному випадку $t = 2x + 5$). Його зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля: $|2x + 5|$ — це відстань від точки 0 до точки $2x + 5$. Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число –7). Отже, рівність $|2x + 5| = 7$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x + 5 = 7$ або $2x + 5 = -7$.

II спосіб

$$|2x - (-5)| = 7,$$

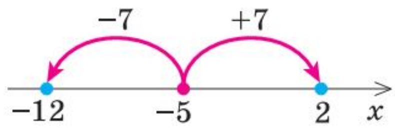



Рис. 14

$$2x = 2 \text{ або } 2x = -12,$$
$$x = 1 \text{ або } x = -6.$$

*Відповідь:* 1; –6. ◁

З геометричної точки зору $|a - b|$ є відстань між точками $a$ і $b$ на координатній прямій. Запишемо задане рівняння так: $|2x - (-5)| = 7$. Тоді рівність $|2x - (-5)| = 7$ означає, що відстань від точки $2x$ до точки –5 дорівнює 7. На відстані 7 від точки –5 знаходяться точки 2 і –12 (рис. 14). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $2x = 2$ або $2x = -12$, тобто задане рівняння рівносильне цій сукупності рівнянь.

**Приклад 5** Розв'яжіть нерівність $|x^2 - 5x| \leqslant 6$.

| *Розв'язання* | *Коментар* |
|---|---|

$$-6 \leqslant x^2 - 5x \leqslant 6,$$
$$\begin{cases} x^2 - 5x \leqslant 6, \\ x^2 - 5x \geqslant -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x+1)(x-6) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-6) \geqslant 0, \end{cases}$$

Розв'язуючи ці нерівності (рис. 15), отримуємо

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x \leqslant 2 \text{ або } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Задана нерівність має вигляд $|t| \leqslant 6$ (у даному випадку $t = x^2 - 5x$), і її можна розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. З геометричної точки зору, $|t|$ — це відстань від точки 0 до точки $t$. На відстані 6 від 0 знаходяться числа 6 і –6.