§ 1. Модуль дійсного числа та його властивості

Під час вивчення теорії границь доводиться користуватися модулем дійсного числа. З цим поняттям ви вже зустрічалися у шкільному курсі математики 6 класу та курсі алгебри. Тепер це питання розглядаємо ґрунтовніше.

Модулем дійсного числа a називається число a, якщо $a \geq 0$, і протилежне йому число $-a$, якщо $a < 0$.

Модуль числа a позначається символом $|a|$ і читається «модуль числа a». Отже, за означенням:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Таким чином, щоб знайти $|a|$, слід спочатку встановити знак числа a, після чого за формулою (1) визначити $|a|$.

Приклади. $|1| = 1$; $|-1| = -(-1) = 1$; $|0| = 0$; $|\pi - 3{,}14| = \pi - 3{,}14$; $|3{,}14 - \pi| = -(3{,}14 - \pi) = \pi - 3{,}14$.

З геометричної точки зору, модуль числа a означає відстань точки числової осі з абсцисою a до точки відліку 0. Справді, якщо $a > 0$, то відповідна точка A числової осі лежить справа від точки 0 на відстані $a = |a|$. Якщо $a < 0$, то точка A міститься на числовій осі зліва від точки 0 на відстані $-a = |a|$.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що $|b - a|$ виражає відстань між точками B і A числової осі, абсциси яких дорівнюють відповідно b і a.

На основі геометричного змісту модуля дійсного числа можна довести такі властивості:

1. $|a| = |-a|$.

2. Якщо $|a| \le b$, то $-b \le a \le b$.

3. Якщо $|a| \ge b$, то або $a \ge b$, або $a \le -b$.

Так, наприклад, нерівність $|a| \le b$ означає, що точка A з абсцисою a міститься від точки відліку 0 на відстані, яка не більша від b, тобто це ті точки числової осі, абсциси яких задовольняють нерівність $-b \le a \le b$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $|x| \le 5$.

Використовуючи властивість 2, маємо $-5 \le x \le 5$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $|x-3| < 4$.

На основі властивості 2 дістанемо $-4 < x - 3 < 4$, або $-1 < x < 7$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $|x| = 5$.

За властивістю 1 знаходимо $x = \pm 5$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $|x| > 5$.

На основі властивості 3 робимо висновок: або $x > 5$, або $x < -5$.

Зауважимо, що для властивостей 2 і 3 справджуються обернені твердження, а саме:

2°. Якщо $-b \le a \le b$, то $|a| \le b$.

3°. Якщо $a \ge b$ або $a \le -b$, то $|a| \ge b$.

Доведемо твердження 2°. Оскільки $a \le b$ і $a \ge -b$, то з нерівності $a \ge -b$ випливає, що $-a \le b$. Але в нерівностях $a \le b$, $-a \le b$ хоча б одне з чисел a, $-a$ збігається з $|a|$.

Розглянемо кілька теорем, які виражають властивості модуля дійсного числа.

Теорема 1.

Модуль суми скінченного числа дійсних чисел $a_1, \ldots, a_n$ не перевищує суми модулів цих чисел:

$$\boxed{|a_1 + \ldots + a_n| \le |a_1| + \ldots + |a_n|}.$$

Д о в е д е н н я. Доведемо цю теорему для випадку суми двох чисел. Оскільки модуль дійсного числа є число невід'ємне, то справджуються нерівності:

$$-|a_1| \le a_1 \le |a_1|, \ -|a_2| \le a_2 \le |a_2|.$$

Додаючи почленно ці нерівності, дістанемо:

$$-(|a_1| + |a_2|) \le a_1 + a_2 \le (|a_1| + |a_2|).$$

Звідси, використовуючи властивість 2°, маємо:

$$|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|.$$

Застосувавши метод математичної індукції, можна довести теорему 1 і для випадку $n \ge 3$ доданків. Зокрема, для $n = 3$ матимемо:

$$|a_1 + a_2 + a_3| \le |a_1| + |a_2 + a_3| \le |a_1| + |a_2| + |a_3|.$$

Теорема 2.

Модуль різниці не менший за різницю модулів зменшуваного і від'ємника, тобто

$$\boxed{|a - b| \geq |a| - |b|}.$$

Д о в е д е н н я. Запишемо число a так: $a = b + (a - b)$. Тоді, на основі теореми 1, $|a| \leq |b| + |a - b|$. Звідси дістанемо доводжувану нерівність $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Теорема 3.

Модуль добутку скінченного числа співмножників $a_1, ..., a_n$ дорівнює добутку модулів цих співмножників:

$$\boxed{|a_1 \ldots a_n| = |a_1| \ldots |a_n|}.$$

Д о в е д е н н я. Для простоти припустимо, що $n = 2$. Тоді:

1) якщо $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, то $a_1 a_2 \geq 0$. Отже, $|a_1 a_2| = |a_1||a_2|$;

2) якщо $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, то $a_1 a_2 < 0$. Отже, $|a_1 a_2| = -a_1 a_2$. Крім того, $|a_1|\,|a_2| = -a_1 a_2$. Тому $|a_1 a_2| = |a_1||a_2|$;

3) якщо $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, то $a_1 a_2 > 0$ і $|a_1 a_2| = a_1 a_2$. З іншого боку, $|a_1||a_2| = (-a_1)(-a_2) = a_1 a_2 = |a_1 a_2|$.

Випадок $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ досліджується аналогічно.

Усі випадки вичерпано. Отже, теорему 3 для двох співмножників доведено. Загальний випадок цієї теореми доводять методом математичної індукції.

Теорема 4.

Модуль частки дорівнює частці від ділення модуля діленого на модуль дільника:

$$\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ якщо } b \neq 0}.$$

Д о в е д е н н я. Зобразимо число a так: $a = \frac{a}{b} \cdot b$. Тоді, за теоремою 3, $|a| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b|$. Звідси дістанемо доводжувану рівність $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

1. Довести, що $\sqrt{a^2} = |a|$.

Р о з в' я з а н н я. Корінь парного степеня з додатного числа, як відомо, має два дійсні значення: одне з цих значень додатне, друге — від'ємне (протилежне першому значенню). **Невід'ємне значення кореня парного степеня називається його арифметичним значенням.**

У математиці під коренем парного степеня на множині дійсних чисел завжди розуміють арифметичне значення цього кореня. Тому якщо $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$. Якщо $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Тобто

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Права частина останньої рівності дорівнює $|a|$, тому $\sqrt{a^2} = |a|$.

2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4 \leq 0$.

Р о з в' я з а н н я. Дану нерівність можна записати так: $x^2 \leq 4$. Добуваючи корінь квадратний з обох частин цієї нерівності, маємо: $|x| \leq 2$, або $-2 \leq x \leq 2$.

3. Розв'язати нерівність $x^2 < 4x + 12$.

Р о з в' я з а н н я. Дану нерівність можна записати так: $x^2 - 4x - 12 < 0$. Тоді, виділивши квадрат двочлена в лівій частині цієї нерівності, матимемо: $(x - 2)^2 < 16$. Добуваючи корінь квадратний з обох частин нерівності, дістанемо $|x - 2| < 4$, або $-4 < x - 2 < 4$. Звідси $-2 < x < 6$.

4. Розв'язати нерівність $|x^2 - x - 2| > x^2 - x - 2$.

Р о з в' я з а н н я. Якщо $|a| > a$, то $a < 0$. Отже, задану нерівність задовольнятимуть усі ті значення x, які будуть задовольняти нерівність $x^2 - x - 2 < 0$, або $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$. Тоді $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$. Звідси $-\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$; $-1 < x < 2$.

5. Знайти дійсні корені рівняння $|\sin x| = \sin x + 3$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай $\sin x \geq 0$. Тоді $|\sin x| = \sin x$, і дане рівняння запишеться так: $\sin x = \sin x + 3$, звідси $3 = 0$. Прийшли до суперечності.

2) Нехай $\sin x < 0$. Тоді $|\sin x| = -\sin x$, і отже, задане рівняння набирає вигляду $-\sin x = \sin x + 3$, або $\sin x = -\frac{3}{2} < -1$.

Оскільки синус не може набувати значень, менших за -1, то прийшли до суперечності.

Таким чином, задане рівняння дійсних коренів не має. Множиною дійсних коренів цього рівняння є порожня множина.

6. Довести нерівність $||a| - |b|| \le |a - b|$, де a і b — довільні дійсні числа.

Р о з в' я з а н н я. Згідно з теоремою 2, справджуються нерівності $|a - b| \ge |a| - |b|$ і $|b - a| \ge |b| - |a|$.

Ці дві нерівності можна записати у вигляді

$$-|a - b| \le |a| - |b| \le |a - b|, \text{ або } ||a| - |b|| \le |a - b|.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається модулем дійсного числа?

2. Яке співвідношення між модулями протилежних чисел?

3. Яка нерівність випливає з нерівності $|a| \le b$?

4. Які нерівності випливають із нерівності $|a| \ge b$?

5. Сформулювати властивість модуля суми скінченного числа дійсних чисел $a_1, \ldots, a_n$.

6. Сформулювати властивість модуля різниці двох дійсних чисел a і b.

7. Чому дорівнює модуль добутку двох дійсних чисел?

8. Чому дорівнює модуль частки двох дійсних чисел a і b, якщо $b \ne 0$?

ВПРАВИ

1. Порівняти між собою значення виразів при довільних значеннях змінної a:

1) $|a|$ і $-a$; 2) $-|a|$ і a; 3) $|3a^2-1|$ і $1 - 3a^2$.

2. Розв'язати рівняння:

1) $|x| - x = 2$; 2) $x^2-5|x| + 6 = 0$; 3) $|3x + 2| = 11 - x$;

4) $|x^2 - 9| = 9 - x^2$; 5) $\dfrac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$; 6) $|x-2| + |x-4| = 6$;

7) $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$; 8) $|x - |4 - x||-2x = 4$;

9) $\dfrac{x^3-1}{|x-1|} = x^3 + x^2 + 1$; 10) $\left|\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}\right| = -\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}$;

11) $x^2 + |x - 2| + |x| + |x + 2| + |x - 3| + |x + 3| - 4 = 0$.

3. Розв'язати нерівність:

1) $|3x - 5| > 10$; 2) $|x - 6| < x^2 - 5x + 9$;

3) $9x^2 - |x - 3| > 9x - 2$; 4) $|x^2 + 3x| \ge 2 - x^2$;

5) $x^2 - 5|x| < -6$; 6) $||x - 1| - 5| < 3 - 2x$;

7) $||x^2 - 3x + 2| - 1| > x - 2$;

8) $|x - 1| - |x| + |2x + 3| > 2x + 4$;

9) $|2x - 1| < |x + 3|$; 10) $\dfrac{|2x-1|}{x^2+x-2} \ge 3$.